

# Корреляция

Сегодня мы поговорим с вами еще об одной разновидности проективного преобразования: о корреляции.

Корреляция родственна (двойственна) коллинеации, о которой мы с вами уже говорили, и действует она похоже, но задается она несколько иначе, нежели уже изученное нами проективное преобразование.

Надеюсь, вы помните, что коллинеация на плоскости определяется соответствием четырех пар точек. О том, что коллинеация может задаваться соответствием четырех пар прямых и даже смешанным соответствием пар, мы еще не говорили. Это упущение мы исправим, но самое главное нужно отметить сейчас: это пары однородных объектов. В трехмерном случае коллинеация задается соответствием пяти пар точек, в четырехмерном шести и т.д.

Корреляция будет задаваться также соответствием пар геометрических объектов, но не однородных, а вида объект — двойственный ему объект. Поэтому в плоскости ее репер будет составлен из пар вида точка — прямая, в пространстве — точка — плоскость. Похожее соответствие мы уже с вами наблюдали, когда говорили о поляритете. Вспомните, в поляритете относительно коники произвольная точка плоскости однозначно переходит в прямую линию этой плоскости, а прямая линия в точку. В трехмерном пространстве: точка в плоскость и наоборот. Это важнейшее свойство полярного преобразования, и именно поэтому говорят, что оно коррелятивно.

Корреляция тоже будет преобразовывать точку в прямую, а прямую в точку. Но она конике будет преобразовывать в конику. Думаю, что всем вам будет небезынтересно посмотреть, как геометрическая схема построения коники по пяти касательным в мгновение ока превратится в схему построения коники по пяти точкам. Еще более интересно (я думаю, что этой схемы вообще никто никогда не видел ввиду сложности ее ручной реализации) посмотреть как выглядит пока неизвестная нам схема построения квадрики, заданной девятью касательными плоскостями, в

пространственной корреляции, переводящей эту задачу в схему построения квадрики по девяти точкам, которую мы уже знаем. Это уже весьма сложная задача, которую мы все-таки постараемся решить.

Зададим в плоскости корреляцию. Начертим ее репер, который будет состоять из четырех точек и четырех прямых. Безусловно, каждая точка должна соответствовать одной из прямых. Соответствие обозначим цветом (рис. 1).

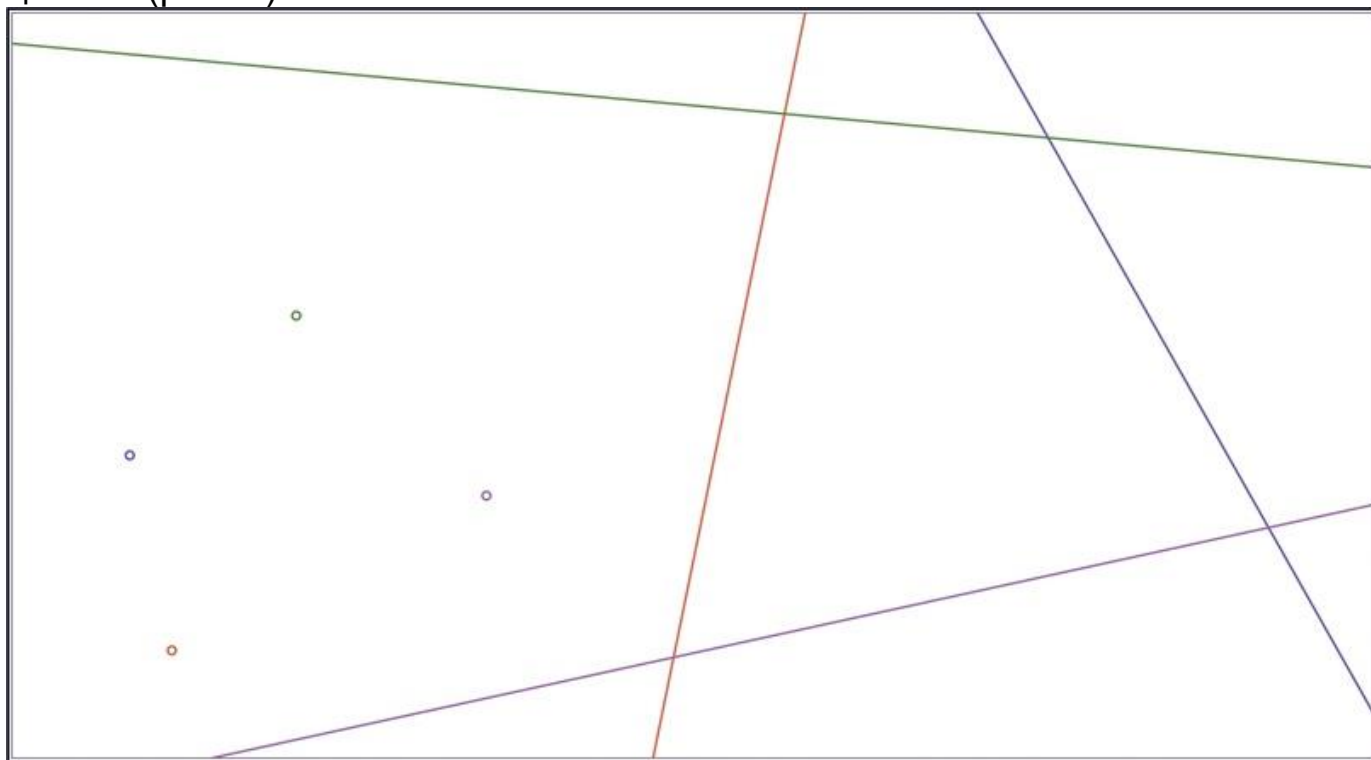


Рис. 1. Репер коррелятивного преобразования

Как и в случае определения коллинеарного преобразования, построим на множестве точек два проективных пучка прямых линий. Выберем в качестве первого центра пучка, например, синюю точку, а в качестве центра второго пучка — зеленую (рис. 2 а, б).

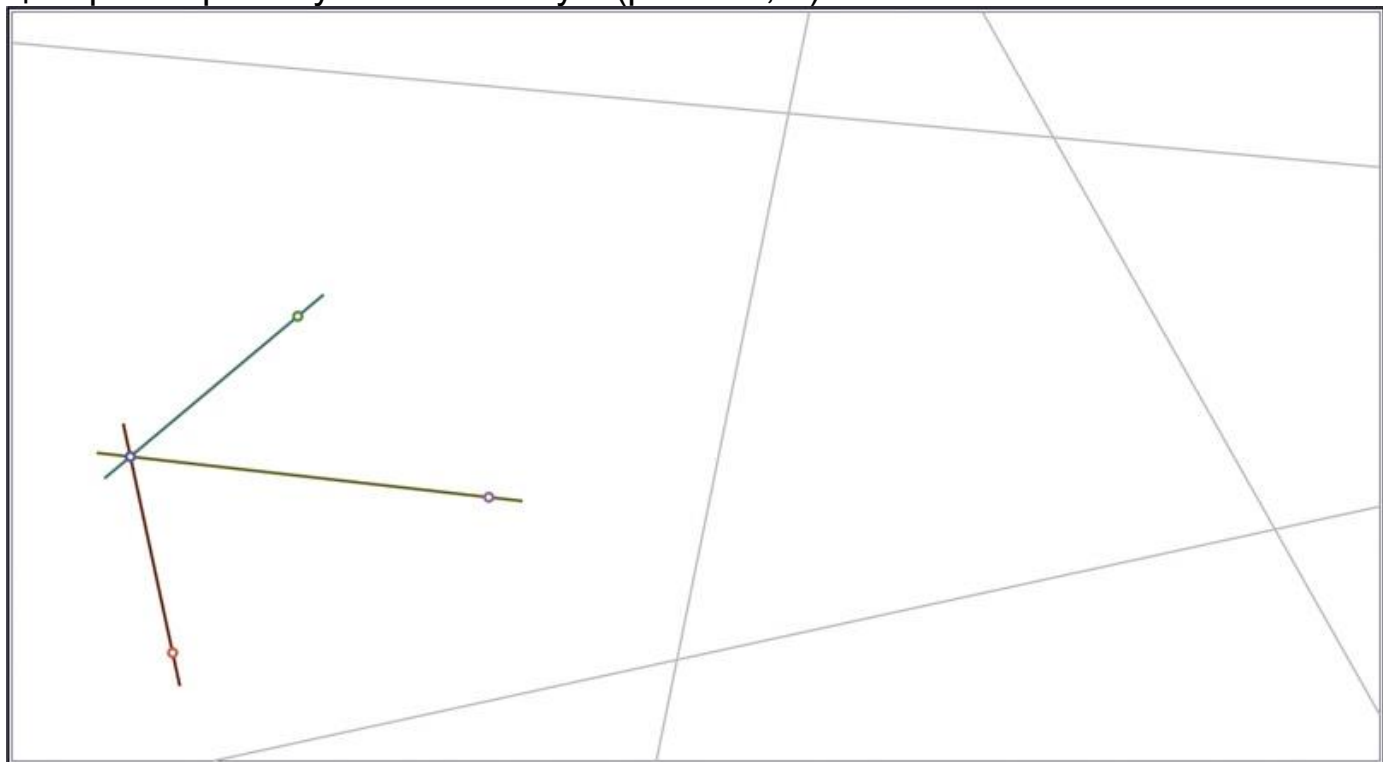


Рис. 2, а. Построение прямых линий первого пучка с центром в синей точке

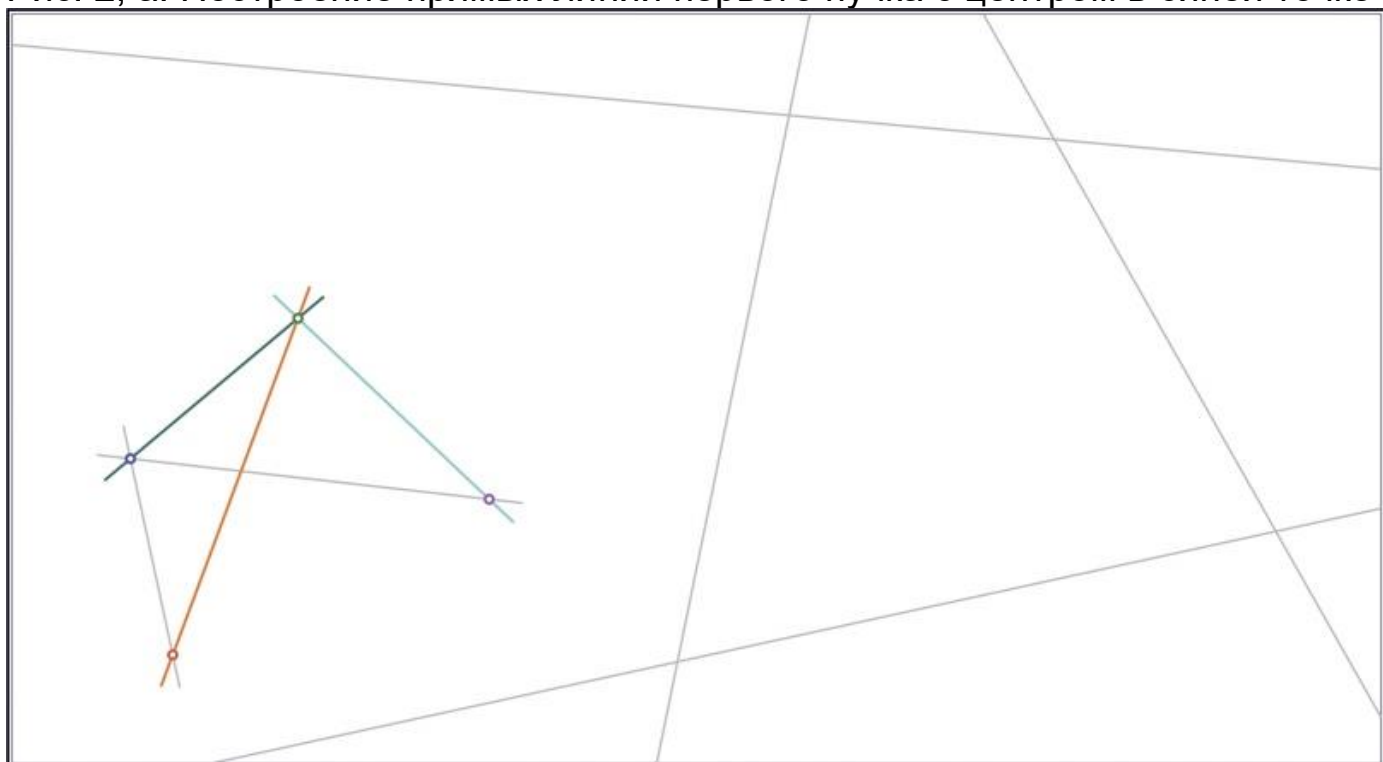


Рис. 2, б. Построение прямых линий второго пучка с центром в зеленой точке

На прямых линиях сделаем нечто похожее, но построим не два пучка прямых, а два линейных ряда точек (это двойственные объекты по отношению к пучкам). Распишу это построение чуть более подробно.

Выберем синюю линию (ведь именно она соответствует синей точке) и найдем точки ее пересечения с красной прямой (точку пересечения обозначим бордовым цветом), затем с сиреневой прямой (точка пересечения будет оливкового цвета) и с зеленой прямой (точка пресечения — сине-зеленая). Очень важно соблюдать соответствие цвета (рис. 3, а)!

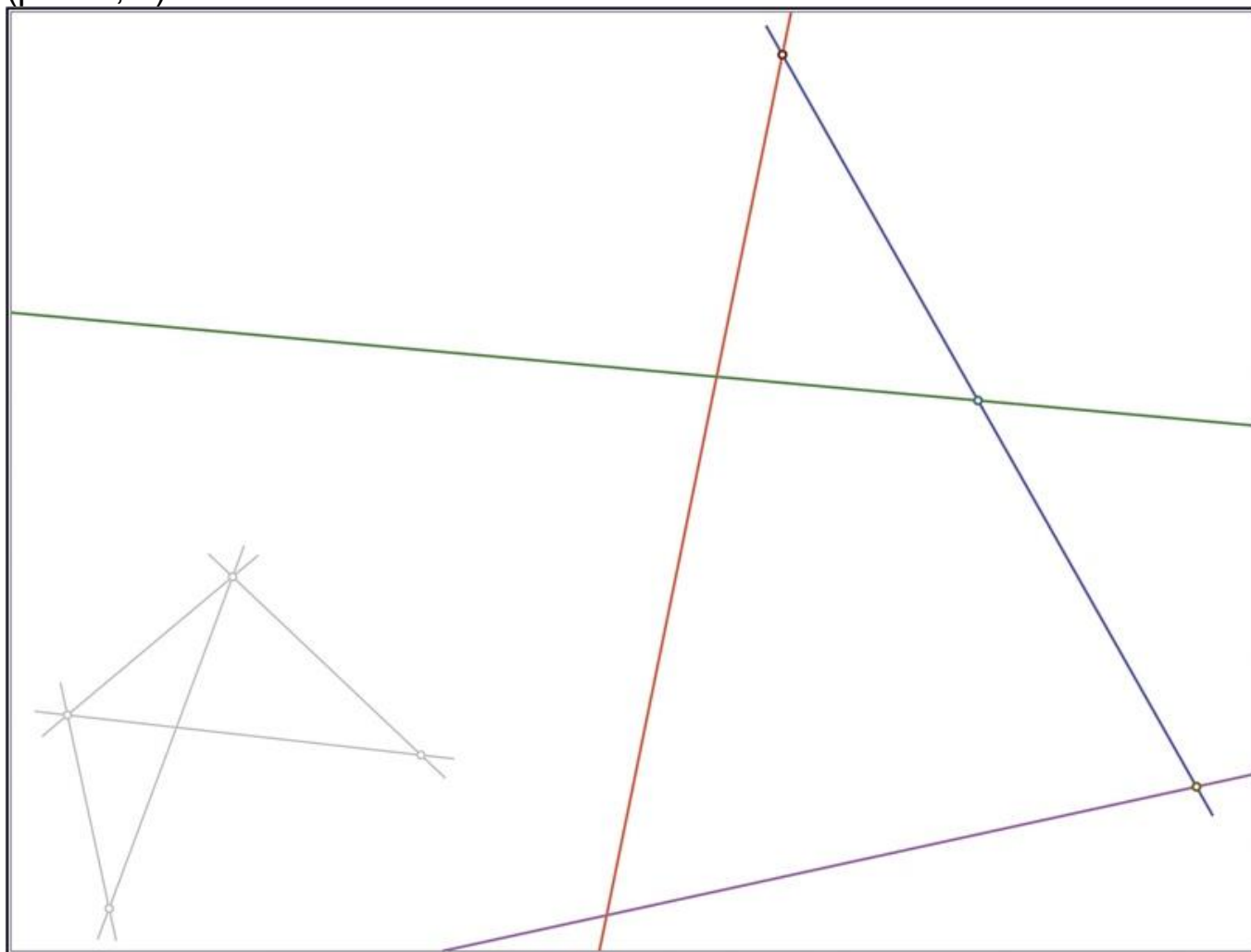


Рис. 3, а. Определение первого линейного ряда точек, соответственного первому пучку

Теперь аналогичные действия выполним в отношении зеленой прямой, поскольку она соответствует зеленому центру второго пучка. Сине-зеленая точка у нас уже есть. В пересечении зеленой прямой с красной получим оранжевую точку, а в пересечении с сиреневой прямой — голубую (рис.3, б).

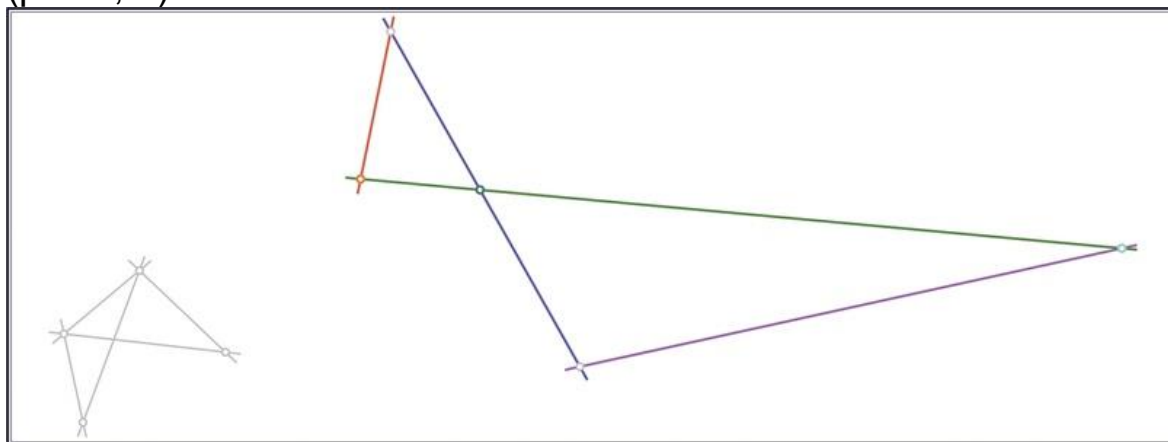


Рис. 3, б. Определение второго линейного ряда точек, соответственного второму пучку

Теперь у нас есть все необходимое, для того чтобы задать два проективитета между соответственными пучками и рядами.

Первый проективитет будет задан носителем — синей точкой и тремя прямыми: бордовой, оливковой и сине-зеленой, а также вторым носителем — синей прямой и тремя точками: бордовой, оливковой и сине-зеленой.

Второй проективитет будет задан носителем — зеленой точкой и тремя прямыми: сине-зеленой, оранжевой и голубой, а также вторым носителем — зеленой прямой и тремя точками: сине-зеленой, оранжевой и голубой.

Зададим на чертеже какую-нибудь произвольную точку (черную), проведем из нее две прямые в центры пучков прямых: светло-зеленую и желтую (рис. 4).

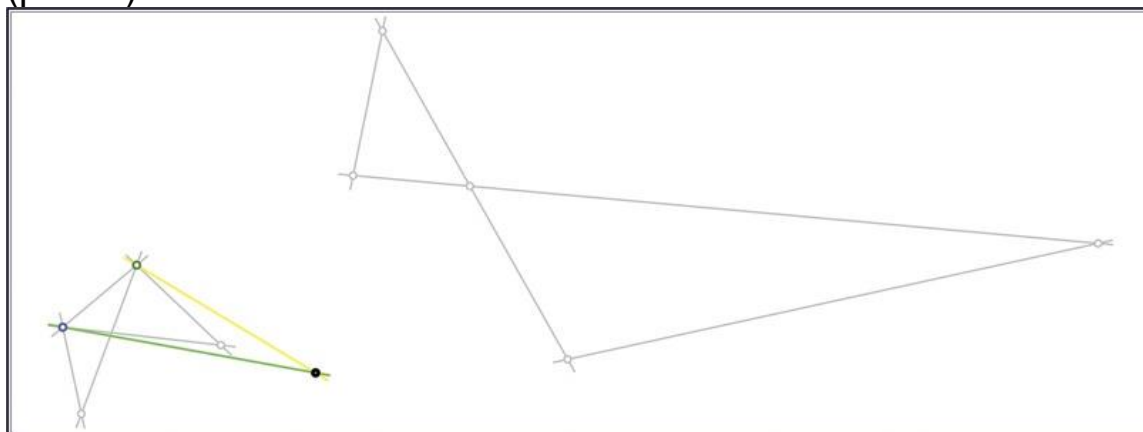


Рис. 4. Выбор произвольной точки плоскости и сопоставление с ней двух прямых пучков

Найдем соответственные точки в проективных соответствиях для светло-зеленой и желтой прямых — получим две точки: светло-зеленую на синей прямой и желтую на зеленой прямой (рис. 5).

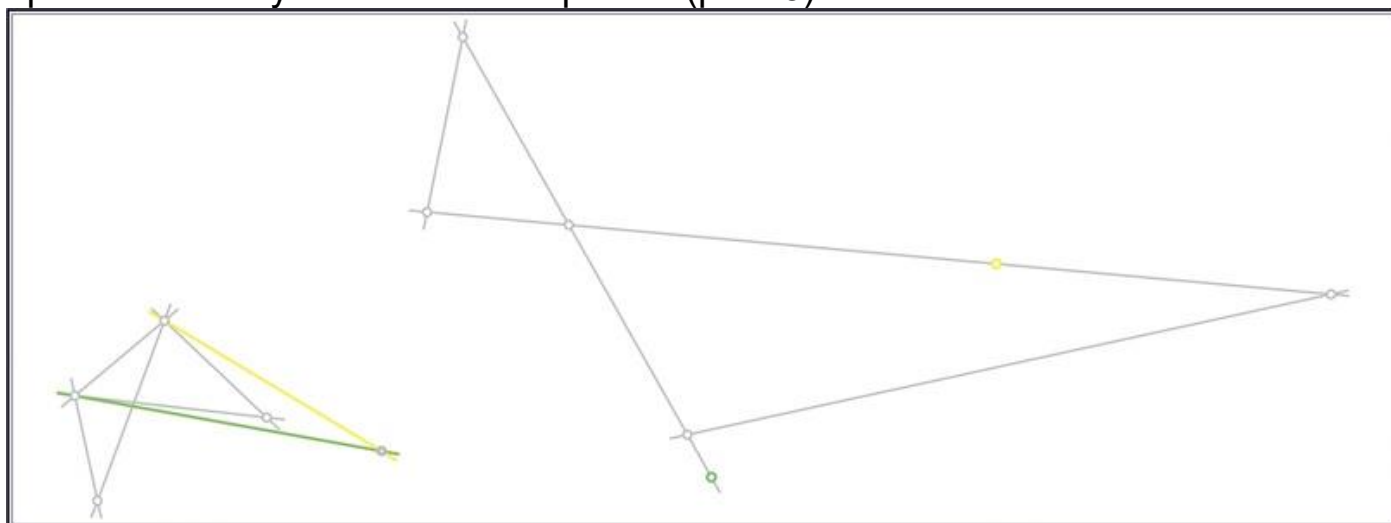


Рис. 5. Результат проективного преобразования светло-зеленой и желтой прямых в соответственных проективитетах

Остается провести прямую линию через две полученные точки и наше преобразование готово (рис. 6)!

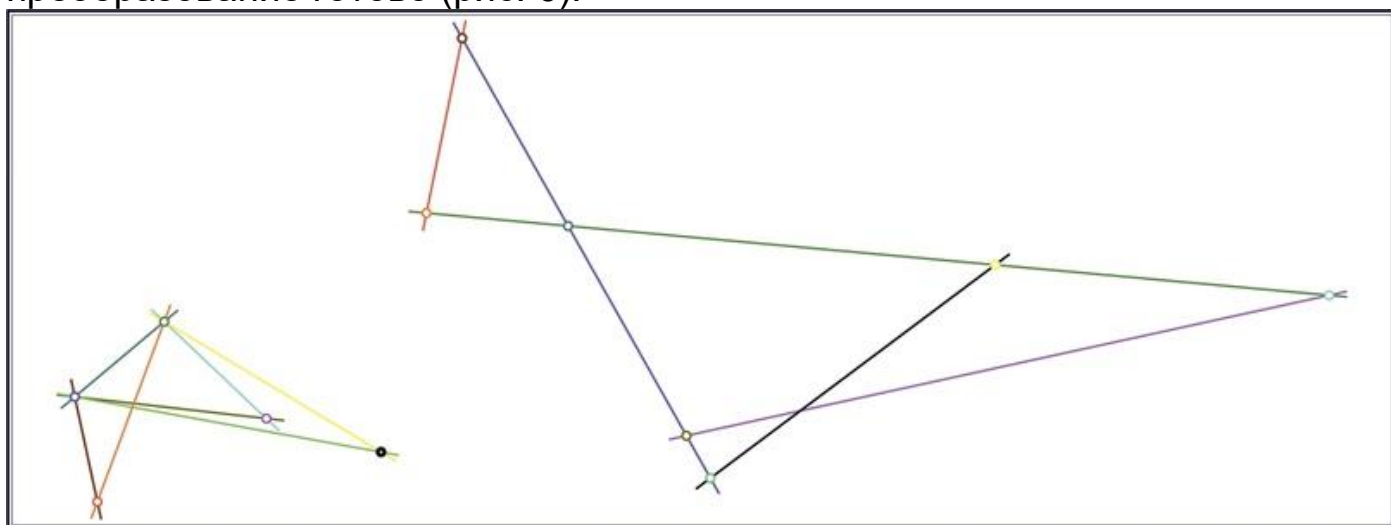


Рис. 6. Коррелятивное преобразование точки в прямую линию

Допустим, нам теперь требуется найти образ прямой линии в корреляции. Прочертим такую линию (черная) (рис. 7).

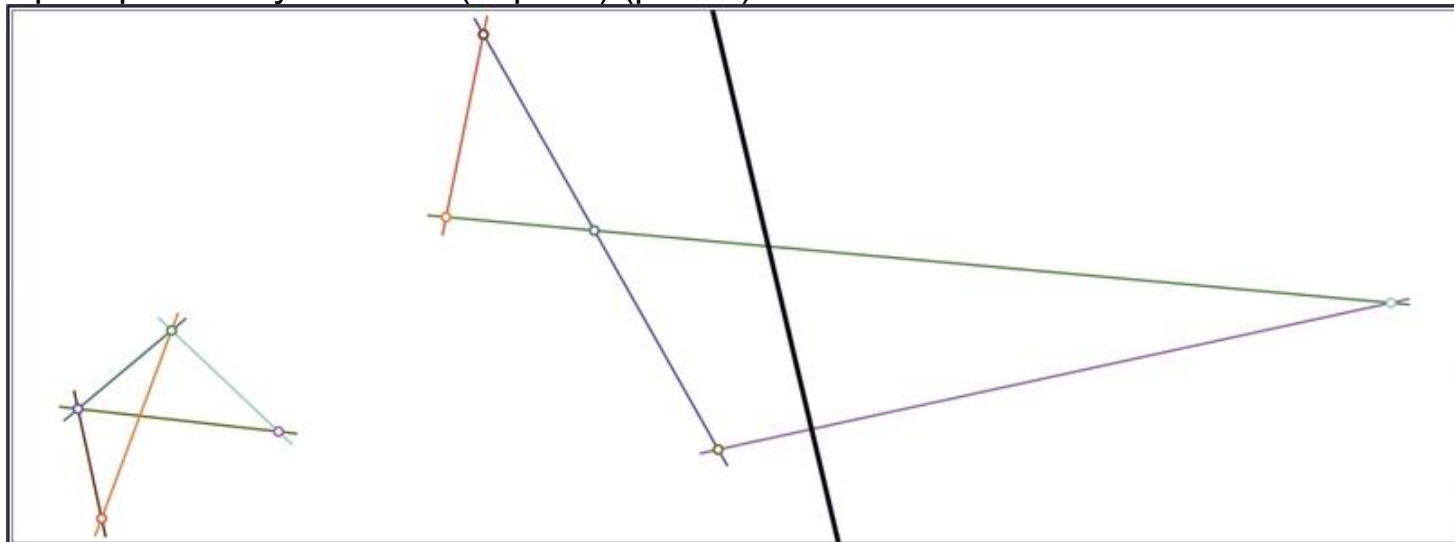


Рис. 7. Исходная линия, подвергаемая коррелятивному преобразованию

Мы теперь умеем находить коррелятивное соответствие для точек. Разместим на прямой линии две произвольные точки и преобразуем их в корреляции по тому же алгоритму, что только что рассмотрели.

Находим прямые — образы двух выбранных точек, пересекаем эти прямые и получаем точку — образ исходно заданной прямой (рис. 8).

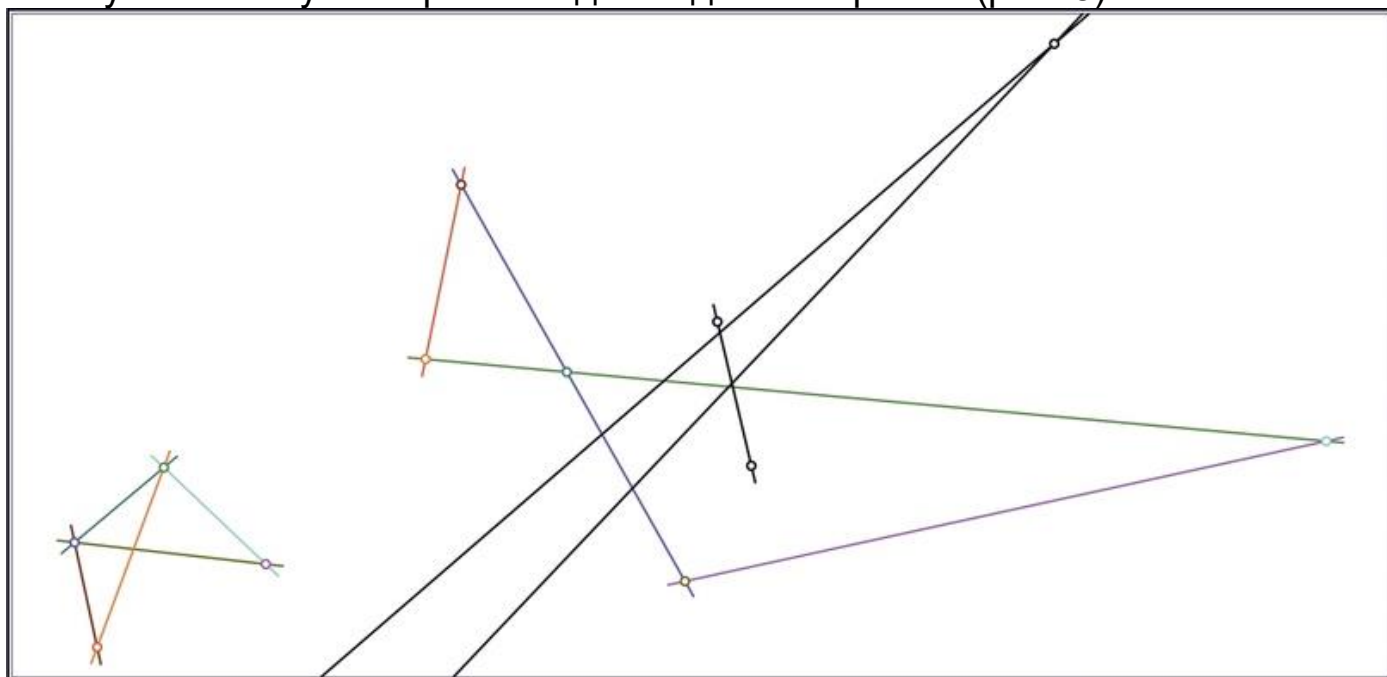


Рис. 8. Построение точки — образа прямой линии в заданном коррелятивном преобразовании

Ну и конечно же, любопытно взглянуть на то, что будет происходить с коникой в коррелятивном преобразовании. Иллюстрация демонстрирует преобразование коники в конику, причем прямые-касательные к исходной конике преобразовались в точки, через которые проходит коника-образ.

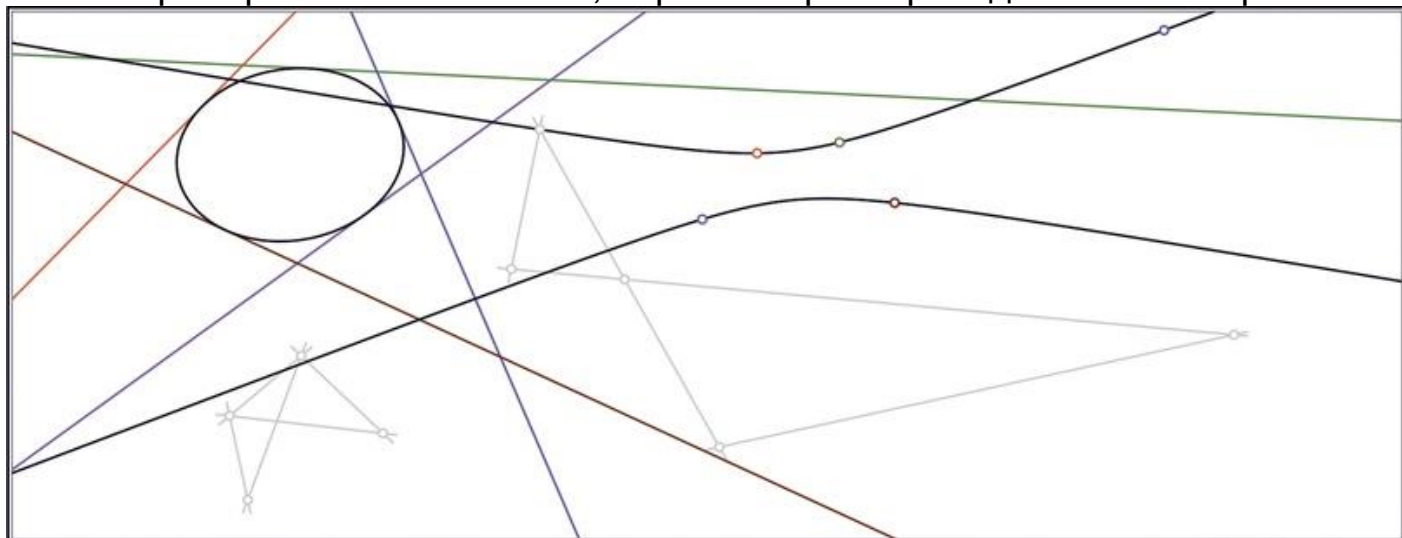


Рис. 9. Коррелятивное преобразование коники

На следующем рисунке показан результат коллинеарного преобразования тех же касательных, задающих исходную конику в касательные к конике-образу. Коллинеация задана с помощью диаметральных точек кривых. Обратите внимание на то, что касательные-образы прошли в точности через те точки, что мы получили от исходных касательных в коррелятивном преобразовании.

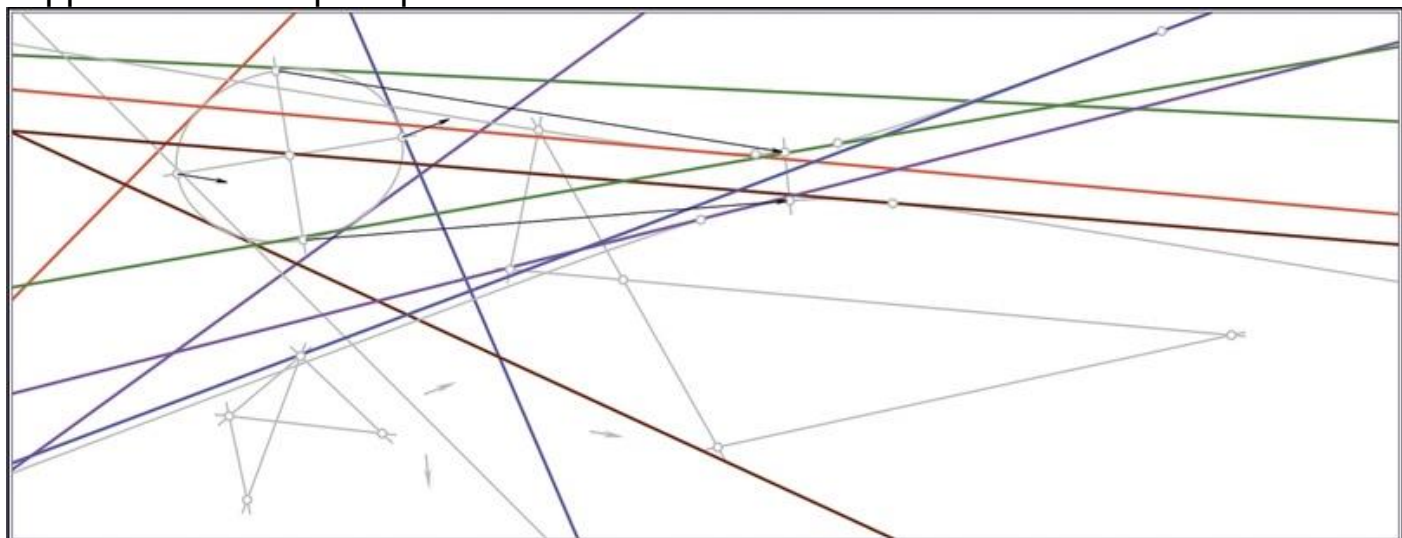


Рис. 10. Иллюстрация к пояснению совместных результатов коррелятивного и коллинеарного преобразования коник